Lycée pilote-Sfax	**Devoir de synthèse N°2**	**Classe : 2Sc**
4 Mars 2009	**Mathématiques**	**Durée : 2H**

Exercice1 : 8points

Soit (u_n) une suite arithmétique tel que $u_4 = 5$ et $u_9 = 15$.

1/a/ Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de cette suite.

b/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n - 3$.

c / Exprimer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

2/ Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n + u_{2n}$.

a/ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 5.

b/ Calculer $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{15}$

3/ On pose $T = 1+2+3+......+15$, $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{30}$ et $S'' = u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{29}$

a/ Calculer T.

b/ Vérifier que $S' + S'' = S + T$, en déduire la valeur de S''.

4/ Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 6n - 9\right)$.

Calculer w_0, w_1 et w_2, en déduire que (w_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

5/ Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = w_n - u_n$

a/ Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer en fonction de n les sommes $A = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$ et $B = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

Exercice2 : 6points

Soit l'application $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2\cos^3 x + 4\cos x - 5\sin x \cos x$

1/ Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2/ Sachant que $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ en déduire $\cos\alpha$ et $f(\alpha)$

3/ a/ Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(\pi - x) + f(x) = 0$.

b/ En déduire la valeur de la somme $f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + f\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

4/ a/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $-2\cos^2 x - 5\sin x + 4 = 0$

b/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = 0$.

Exercice3 : 6points

Soit ABC un triangle tel que $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$, $AC = 3\sqrt{6}$, $BC = 6\sqrt{3}$ et $B\hat{A}C$ est un angle aigu.

1/ Calculer $\sin B\hat{A}C$ en déduire $B\hat{A}C$ et $A\hat{C}B$ en radians.

2/ Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a/ Calculer BH et AH.

b/ En déduire que $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c/ Déterminer $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$. En déduire que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

d/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} - 3)\operatorname{tg}x + 2 - \sqrt{3} = 0$